

Identification des systèmes linéaires

G. Laurent

2009

1 Introduction

On cherche à identifier les paramètres d'un modèle entrée-sortie linéaire (en temps discret) sous la forme générale :

$$y(k) = G(q)u(k) + H(q)e(k) \quad (1)$$

où y sont les sorties du système, u les entrées et e les bruits.

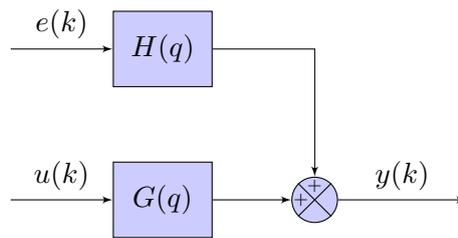


FIGURE 1 – Système linéaire bruité.

On fait généralement des hypothèses sur la structure du modèle, c'est-à-dire sur la forme des fonctions $G(q)$ et $H(q)$. On parle alors de modèle-hypothèse. Un modèle-hypothèse traduit le fait que l'on fait une hypothèse sur la structure du système (ordre, retard, etc.) et sur le type de bruit (bruit de sortie, bruit de boucle, etc.).

2 Modèle-hypothèse ARX

2.1 Structure

Le modèle-hypothèse ARX¹ (AutoRégressif à variables eXogènes) est un modèle entrée-sortie de la forme :

$$\hat{y}(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_{n_a} y(k-n_a) = b_1 u(k-1) + \dots + b_{n_b} u(k-n_b) + e(k) \quad (2)$$

1. Ce modèle est aussi appelé *equation error model structure*.

où y sont les sorties du système, u les entrées et e une séquence de nombres aléatoires indépendants d'espérance nulle et de variance λ , généralement appelé bruit de boucle ou bruit d'état dans le cas ARX.

On représente souvent ce modèle sous une forme plus compacte :

$$A(q)y(k) = B(q)u(k) + e(k) \quad (3)$$

avec :

$$A(q) = 1 + a_1q^{-1} + \dots + a_{n_a}q^{-n_a} \quad (4)$$

$$B(q) = b_1q^{-1} + \dots + b_{n_b}q^{-n_b} \quad (5)$$

On remarque que $A(q)$ est sous forme monique.

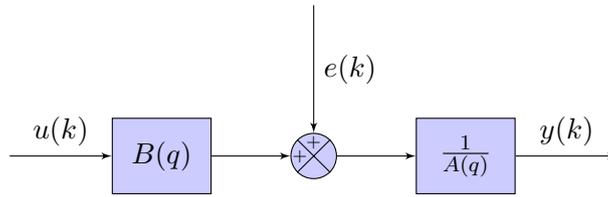


FIGURE 2 – Modèle-hypothèse ARX.

2.2 Prédicteur à un pas

On cherche à prédire la sortie à l'instant k sachant que la sortie et l'entrée sont connues aux instants précédents. On prend comme estimation de la sortie son espérance mathématique conditionnelle, soit :

$$\hat{y}(k|k-1) = \mathbb{E}[y(k)|k-1] \quad (6)$$

or on a supposé que :

$$\hat{y}(k) + a_1y(k-1) + \dots + a_{n_a}y(k-n_a) = b_1u(k-1) + \dots + b_{n_b}u(k-n_b) + e(k) \quad (7)$$

donc :

$$\hat{y}(k) = b_1u(k-1) + \dots + b_{n_b}u(k-n_b) + e(k) - a_1y(k-1) - \dots - a_{n_a}y(k-n_a) \quad (8)$$

$$= B(q)u(k) + e(k) + (1 - A(q))y(k) \quad (9)$$

En remplaçant dans l'équation 6, on obtient :

$$\hat{y}(k|k-1) = \mathbb{E}[B(q)u(k) + e(k) + [1 - A(q)]y(k)|k-1] \quad (10)$$

comme on a supposé que $e(k)$ a une espérance nulle, le prédicteur à un pas est défini par :

$$\hat{y}(k|k-1) = B(q)u(k) + [1 - A(q)]y(k) \quad (11)$$

Ce prédicteur est particulièrement simple à calculer car il définit une régression linéaire que l'on écrit généralement sous la forme :

$$\hat{y}(k) = \varphi^T(k)\theta \quad (12)$$

avec :

$$\varphi(k) = [-y(k-1) \quad \cdots \quad -y(k-n_a) \quad u(k-1) \quad \cdots \quad u(k-n_b)]^T \quad (13)$$

$$\theta = [a_1 \quad \cdots \quad a_{n_a} \quad b_1 \quad \cdots \quad b_{n_b}]^T \quad (14)$$

2.3 Critère quadratique

L'erreur de prédiction est alors :

$$\tilde{e}(k) = y(k) - \hat{y}(k|k-1) = e(k) \quad (15)$$

$\tilde{e}(k)$ représente la part de la sortie qui ne peut être prédite. Pour cette raison, elle est aussi appelée innovation.

On définit le critère quadratique par :

$$V(N, \theta) = \sum_{k=1}^N [y(k) - \hat{y}(k|k-1)]^2 = \sum_{k=1}^N [y(k) - \varphi^T(k)\theta]^2 \quad (16)$$

Il est facile de montrer que le prédicteur défini par l'espérance conditionnelle minimise bien le critère quadratique. Donc, si on trouve des paramètres qui minimisent le critère alors ils correspondront au prédicteur recherché (pour autant que le minimum soit unique).

2.4 Méthode des moindres carrés

On cherche le vecteur de paramètre θ qui minimise $V(N)(\theta)$. Comme le critère est quadratique, il existe une solution analytique (en annulant sa dérivée première), ce qui donne sous réserve que l'inverse existe :

$$\hat{\theta}(N) = \arg \min V(N, \theta) = \left[\sum_{k=1}^N \varphi(k)\varphi^T(k) \right]^{-1} \sum_{k=1}^N \varphi(k)y(k) \quad (17)$$

Remarque : on n'utilisera pas cette formule analytique directement car elle n'est pas stable numériquement [1, p. 318].

2.5 Méthode des moindres carrés récursifs

Si les données sont en nombre trop important ou si on souhaite utiliser le modèle à l'instant k sans attendre la fin des mesures, il est nécessaire d'utiliser un algorithme récursif : méthode recalcule une nouvelle estimation des paramètres à chaque instant sur la base de l'estimation précédente.

On pose :

$$R(k) = \sum_{t=1}^k \varphi(t)\varphi^T(t) \quad (18)$$

$$f(k) = \sum_{t=1}^k \varphi(t)y(t) \quad (19)$$

On a alors :

$$\hat{\theta}(k) = R(k)^{-1}f(k) \quad (20)$$

$R(k)$ et $f(k)$ peuvent-être mis sous forme récursive sans aucune approximation :

$$R(k) = R(k-1) + \varphi(k)\varphi^T(k) \quad (21)$$

$$f(k) = f(k-1) + \varphi(k)y(k) \quad (22)$$

On en déduit :

$$\hat{\theta}(k) = R(k)^{-1}f(k) \quad (23)$$

$$= R(k)^{-1} [f(k-1) + \varphi(k)y(k)] \quad (24)$$

$$= R(k)^{-1} [R(k-1)\hat{\theta}(k-1) + \varphi(k)y(k)] \quad (25)$$

$$= R(k)^{-1} \left[[R(k) - \varphi(k)\varphi^T(k)] \hat{\theta}(k-1) + \varphi(k)y(k) \right] \quad (26)$$

$$= \hat{\theta}(k-1) + R(k)^{-1}\varphi(k) \left[y(k) - \varphi^T(k)\hat{\theta}(k-1) \right] \quad (27)$$

On peut donc calculer $\hat{\theta}(k)$ de façon récursive sans aucune approximation.

Version efficace

Pour éviter d'inverser $R(k)$ à chaque pas, il est pratique d'introduire :

$$P(k) = R(k)^{-1} \quad (28)$$

et d'appliquer le lemme d'inversion :

$$[A + BCD]^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B[DA^{-1}B + C^{-1}]^{-1}DA^{-1} \quad (29)$$

En posant $A = R(k-1)$, $B = D^T = \varphi(k)$ et $C = 1$, on obtient la mise à jour suivante :

$$K(k) = \frac{P(k-1)\varphi(k)}{1 + \varphi^T(k)P(k-1)\varphi(k)} \quad (30)$$

$$P(k) = P(k-1) - K(k)\varphi^T(k)P(k-1) \quad (31)$$

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + K(k) \left[y(k) - \varphi^T(k)\hat{\theta}(k) \right] \quad (32)$$

Initialisation

On prendra $P(0)$ grand (par exemple $P(0) = 10^{12}I$), $\hat{\theta}(0)$ arbitrairement.

Les conditions initiales peuvent être interprétées : $\hat{\theta}(0)$ représente la valeur moyenne *a priori* des paramètres et $P(0)$ leurs variances [1, p. 368].

Cas multivariable

La version multivariable s'obtient de façon similaire [1, p. 376].

2.6 Méthode des moindres carrés récurrents avec facteur d'oubli

Dans le cas où les paramètres du modèle évoluent de manière lente, on utilise la méthode des moindres carrés récurrents avec facteur d'oubli exponentiel.

On cherche alors à calculer les paramètres qui minimisent un critère pondéré par une puissance d'un coefficient λ :

$$\hat{\theta}(k) = \arg \min \sum_{t=1}^k \lambda^{k-t} [y(t) - \varphi^T(t)\theta]^2 \quad (33)$$

Ainsi les résidus les plus anciens ont moins d'importance.

On montre comme précédemment que :

$$\hat{\theta}(k) = R(k)^{-1}f(k) \quad (34)$$

avec :

$$R(k) = \sum_{t=1}^k \lambda^{k-t} \varphi(t)\varphi^T(t) \quad (35)$$

$$f(k) = \sum_{t=1}^k \lambda^{k-t} \varphi(t)y(t) \quad (36)$$

$R(k)$ et $f(k)$ peuvent aussi être mis sous forme récursive sans aucune approximation :

$$R(k) = \lambda R(k-1) + \varphi(k)\varphi^T(k) \quad (37)$$

$$f(k) = \lambda f(k-1) + \varphi(k)y(k) \quad (38)$$

Il vient :

$$\hat{\theta}(k) = R(k)^{-1}f(k) \quad (39)$$

$$= R(k)^{-1}[\lambda f(k-1) + \varphi(k)y(k)] \quad (40)$$

$$= R(k)^{-1}[\lambda R(k-1)\hat{\theta}(k-1) + \varphi(k)y(k)] \quad (41)$$

$$= R(k)^{-1}[[R(k) - \varphi(k)\varphi^T(k)]\hat{\theta}(k-1) + \varphi(k)y(k)] \quad (42)$$

$$= \hat{\theta}(k-1) + R(k)^{-1}\varphi(k)[y(k) - \varphi^T(k)\hat{\theta}(k-1)] \quad (43)$$

On peut donc calculer $\hat{\theta}(k)$ de façon récursive sans aucune approximation.

Version efficace

Pour éviter d'inverser $R(k)$ à chaque pas, on introduit :

$$P(k) = R(k)^{-1} \quad (44)$$

et on applique le lemme d'inversion avec $A = \lambda R(k-1)$, $B = D^T = \varphi(k)$ et $C = 1$, on obtient la mise à jour suivante :

$$K(k) = \frac{P(k-1)\varphi(k)}{\lambda + \varphi^T(k)P(k-1)\varphi(k)} \quad (45)$$

$$P(k) = \frac{1}{\lambda} [P(k-1) - K(k)\varphi^T(k)] \quad (46)$$

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + K(k)[y(k) - \varphi^T(k)\hat{\theta}(k-1)] \quad (47)$$

Choix du facteur d'oubli λ

Si les paramètres de système ne varie pas dans le temps, alors on peut choisir un facteur d'oubli $\lambda(k) = 1$, on retombe sur les formules des moindres carrés récurrents.

Dans le cas contraire, on choisira $\lambda(k) < 1$ (typiquement entre 0.98 et 0.995). La valeur de λ dépend de la dynamique d'évolution des paramètres du système [1, p. 378].

Version normalisée

On peut aussi estimer les paramètres qui minimisent le critère pondéré et normalisé :

$$\hat{\theta}(k) = \arg \min \gamma(k) \sum_{t=1}^k \lambda^{k-t} [y(t) - \varphi^T(t)\theta]^2 \quad (48)$$

avec :

$$\gamma(k) = \frac{1}{\sum_{t=1}^k \lambda^{k-t}} \quad (49)$$

On obtient alors les équations de mise à jour suivantes :

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + \gamma(k)R^{-1}(k)\varphi(k) [y(k) - \varphi^T(k)\hat{\theta}(k-1)] \quad (50)$$

$$R(k) = R(k-1) + \gamma(k) [\varphi(k)\varphi^T(k) - R(k-1)] \quad (51)$$

3 Modèle-hypothèse ARMAX

3.1 Structure

Le modèle-hypothèse ARMAX (AutoRégressif à Moyenne Ajustée et à variables eXogènes) est un modèle entrée-sortie de la forme :

$$\begin{aligned} \hat{y}(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_{n_a} y(k-n_a) &= b_1 u(k-1) + \dots \\ &+ b_{n_b} u(k-n_b) + e(k) + c_1 e(k-1) + \dots + c_{n_c} e(k-n_c) \end{aligned} \quad (52)$$

Sous une forme plus compacte :

$$A(q)y(k) = B(q)u(k) + C(q)e(k) \quad (53)$$

avec :

$$A(q) = 1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_{n_a} q^{-n_a} \quad (54)$$

$$B(q) = b_1 q^{-1} + \dots + b_{n_b} q^{-n_b} \quad (55)$$

$$C(q) = 1 + c_1 q^{-1} + \dots + c_{n_c} q^{-n_c} \quad (56)$$

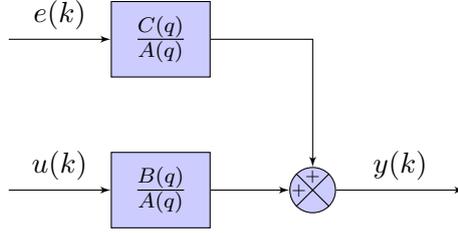


FIGURE 3 – Modèle-hypothèse ARMAX.

3.2 Prédicteur à un pas

On prend toujours comme estimation de la sortie son espérance mathématique conditionnelle, soit :

$$\hat{y}(k|k-1) = \mathbb{E}[y(k)|k-1] \quad (57)$$

or :

$$y(k) = B(q)u(k) + C(q)e(k) + [1 - A(q)]y(k) \quad (58)$$

donc :

$$\hat{y}(k|k-1) = \mathbb{E}[B(q)u(k) + C(q)e(k) + [1 - A(q)]y(k)|k-1] \quad (59)$$

$$= B(q)u(k) + \mathbb{E}[C(q)e(k)|k-1] + [1 - A(q)]y(k) \quad (60)$$

Le problème est donc de calculer $\mathbb{E}[C(q)e(k)|k-1]$ qui n'est pas nulle car il faut prendre en compte les réalisations passées du bruit.

On note :

$$v(k) = C(q)e(k) \quad (61)$$

Si $C(q)$ n'a pas de racine de module supérieure ou égale à 1, alors on a :

$$e(k) = \frac{1}{C(q)}v(k) \quad (62)$$

Comme $C(q)$ est monique le second membre ne dépend que du passé. De plus $e(k)$ d'espérance nulle, on a :

$$\mathbb{E}[v(k)|k-1] = [C(q) - 1]e(k) \quad (63)$$

$$= \frac{C(q) - 1}{C(q)}v(k) \quad (64)$$

$$= \frac{C(q) - 1}{C(q)}[A(q)y(k) - B(q)u(k)] \quad (65)$$

$$= [1 - \frac{1}{C(q)}][A(q)y(k) - B(q)u(k)] \quad (66)$$

On obtient donc le prédicteur à un pas suivant :

$$\hat{y}(k|k-1) = B(q)u(k) + [1 - \frac{1}{C(q)}][A(q)y(k) - B(q)u(k)] + [1 - A(q)]y(k) \quad (67)$$

$$= \frac{B(q)}{C(q)}u(k) + [1 - \frac{A(q)}{C(q)}]y(k) \quad (68)$$

ou encore :

$$C(q)\hat{y}(k|k-1) = B(q)u(k) + [C(q) - A(q)]y(k) \quad (69)$$

et enfin sous sa forme la plus pratique

$$\hat{y}(k|k-1) = B(q)u(k) + [C(q) - A(q)]y(k) - [C(q) - 1]\hat{y}(k|k-1) \quad (70)$$

$$= B(q)u(k) + [1 - A(q)]y(k) - [C(q) - 1][y(k) - \hat{y}(k|k-1)] \quad (71)$$

Le prédicteur associé est :

$$\hat{y}(k) = B(q)u(k) + [1 - A(q)]y(k) + [C(q) - 1]\tilde{e}(k) \quad (72)$$

avec : $\tilde{e}(k) = y(k) - \hat{y}(k)$.

On peut écrire ce prédicteur sous la forme :

$$\hat{y}(k) = \varphi^T(k)\theta \quad (73)$$

en posant :

$$\varphi(k) = [-y(k-1) \quad \dots \quad -y(k-n_a) \quad u(k-1) \quad \dots \quad u(k-n_b) \quad \tilde{e}(k-1) \quad \dots \quad \tilde{e}(k-n_c)]^T \quad (74)$$

$$\theta = [a_1 \quad \dots \quad a_{n_a} \quad b_1 \quad \dots \quad b_{n_b} \quad c_1 \quad \dots \quad c_{n_c}]^T \quad (75)$$

Ce prédicteur ne définit pas une régression linéaire car il est bouclé. Il est généralement qualifié de régression pseudo-linéaire.

3.3 Méthode des moindres carrés étendue

L'idée est d'appliquer un algorithme des moindres carrés récursifs comme pour un modèle ARX. La différence est que $\varphi(k)$ contient des éléments qui ont été construits en utilisant le modèle à des instants antérieurs ce qui affecte les propriétés de convergence.

La convergence n'est plus garantie. Il existe cependant une condition suffisante de convergence, qui exige que pour tout ω on ait :

$$\operatorname{Re} \frac{1}{C_0(e^{i\omega})} \geq \frac{1}{2} \quad (76)$$

où $C_0(q)$ est le polynôme réel du système.

3.4 Méthode par recherches itératives ou récursives

Une méthode générale consiste à calculer le gradient du critère dans le but d'utiliser une méthode générique de minimisation itérative ou récursif (voir cours d'optimisation). Le critère est défini par :

$$V(N, \theta) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} [y(k) - \hat{y}(k|k-1)]^2 \quad (77)$$

On a donc :

$$\nabla_{\theta} V(N, \theta) = \sum_{k=1}^N -\nabla_{\theta} \hat{y}(k|k-1) [y(k) - \hat{y}(k|k-1)] \quad (78)$$

Le prédicteur ARMAX étant de la forme :

$$C(q)\hat{y}(k|k-1) = B(q)u(k) + [C(q) - A(q)]y(k) \quad (79)$$

On a :

$$C(q) \frac{\partial}{\partial a_k} \hat{y}(k|k-1) = -q^{-k} y(k) \quad (80)$$

$$C(q) \frac{\partial}{\partial b_k} \hat{y}(k|k-1) = -q^{-k} u(k) \quad (81)$$

$$q^{-k} + C(q) \frac{\partial}{\partial c_k} \hat{y}(k|k-1) = -q^{-k} (y(k) - \hat{y}(k|k-1)) \quad (82)$$

C'est-à-dire :

$$C(q) \nabla_{\theta} \hat{y}(k|k-1) = \varphi(k) \quad (83)$$

Le gradient est donc obtenu en filtrant le vecteur de régression pseudo-linéaire par $1/C(q)$. A priori $C(q)$ est inconnu

4 Méthode des variables instrumentales

4.1 Corrélation entre les erreurs de prédictions et les données passés

Idéalement, les erreurs de prédiction d'un « bon » modèle ne sont pas corrélées avec les données passées (corrélation linéaire ou non d'ailleurs).

On devrait donc avoir par exemple :

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \zeta(k) \tilde{e}(k) = 0 \quad (84)$$

quelque soient les sous-ensembles finis de données $\zeta(k)$.

On remarque que si on prend $\zeta(k) = \varphi(k)$, on retombe alors sur la solution des moindres carrés (zéro du gradient du critère) :

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k)[y(k) - \varphi^T(k)\theta] = 0 \quad (85)$$

4.2 Variables instrumentales

Soit un système décrit par :

$$y(k) = \varphi^T(k)\theta_0 + \nu_0(k) \quad (86)$$

où ν_0 est un bruit de sortie. et un prédicteur linéaire :

$$\hat{y} = \varphi^T(k)\theta \quad (87)$$

Si on applique la méthode des moindres carrés, on obtient les paramètres θ_N^{LS} qui annule le gradient du critère, c-à-d :

$$\theta_N^{LS} = \text{sol} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k)[y(k) - \varphi^T(k)\theta] = 0 \right\} \quad (88)$$

Theorem 1. *Si la matrice de corrélation $Cor(\varphi, \varphi) = \sum_{k=1}^N \varphi(k)\varphi(k)^T$ est non singulière et si le bruit de sortie $\nu(k)$ n'est pas corrélé avec $\varphi(k)$, alors θ_N^{LS} converge en probabilité vers θ_0 [2] [1, page 205].*

Quand $\nu_0(k)$ et $\varphi(k)$ sont corrélées (ce qui arrive par exemple pour un modèle de type ARMAX), il est probable que θ_N^{LS} ne convergent pas vers θ_0 .

Comme on l'a vu dans la section précédente, un bon modèle ne doit pas être corrélé avec les données passées. On peut donc essayer de trouver une solution avec un vecteur de corrélation $\zeta(k)$ plus général, soit :

$$\theta_N^{IV} = \text{sol} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \zeta(k)[y(k) - \varphi^T(k)\theta] = 0 \right\} \quad (89)$$

$$= \text{sol} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \zeta(k)\nu_0(k) = 0 \right\} \quad (90)$$

Donc pour que θ_N^{IV} tende vers θ_0 , il faut que $\zeta(k)$ ne soit pas corrélé à $\nu_0(k)$.

Si la matrice est inversible, on a alors

$$\hat{\theta}_N^{IV} = \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \zeta(k)\varphi^T(k) \right]^{-1} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \zeta(k)y(k) \quad (91)$$

Theorem 2. Si la matrice de corrélation $Cor(\varphi, \varphi) = \sum_{k=1}^N \zeta(k)\varphi(k)^T$ est non singulière et si le bruit de sortie $\nu(k)$ n'est pas corrélé avec $\zeta(k)$, alors θ_N^{IV} converge en probabilité vers θ_0 [2] [1, page 205].

Les éléments de $\zeta(k)$ sont appelés *variables instrumentales* ou simplement *instruments*.

4.3 Choix des variables instrumentales

Une idée naturelle consiste à choisir comme variables instrumentales similaires à un modèle ARX mais en calculant des sorties fictives $x(k)$ à travers un système linéaire :

$$N(q)x(k) = M(q)u(k) \quad (92)$$

$N(q)$ étant monique.

On choisit alors :

$$\zeta(k) = K(q) \begin{bmatrix} -x(k-1) & \cdots & -x(k-n_a) & u(k-1) & \cdots & u(k-n_b) \end{bmatrix}^T \quad (93)$$

ou $K(q)$ est un filtre linéaire.

$\zeta(k)$ est alors corrélé avec les données et non corrélé avec le bruit.

La qualité de l'estimation par la méthode des variables instrumentales dépend naturellement du choix de $\zeta(k)$. Le mieux serait de prendre $N(q) = A_0(q)$ et $M(q) = B_0(q)$. Mais comme ces polynômes ne sont pas connus un choix classique est d'utiliser le résultat de la méthode des moindres carrés $N(q) = A^{LS}(q)$ et $M(q) = B^{LS}(q)$. Dans ce cas, on utilise $K(q) = 1$.

5 Conclusion

L'identification des paramètres d'un système peut se faire en de multiples étapes en alternant les méthodes (moindres carrés, variables instrumentales, recherches itératives) et les modèles (ARX, ARMAX, etc.). Cette méthode qui consiste à alterner estimations de θ et formations de nouveau vecteur φ et ζ est appelée *bootstrap*.

Références

- [1] Lennart Ljung. *System identification : theory for the user*. Prentice Hall PTR, 1999. 3, 5, 6, 11, 12
- [2] Peter Young. *Recursive estimation and time-series analysis : an introduction*. Springer-Verlag, 1984. 11, 12