# Travaux pratiques d'optimisation de fonctions continues non linéaires

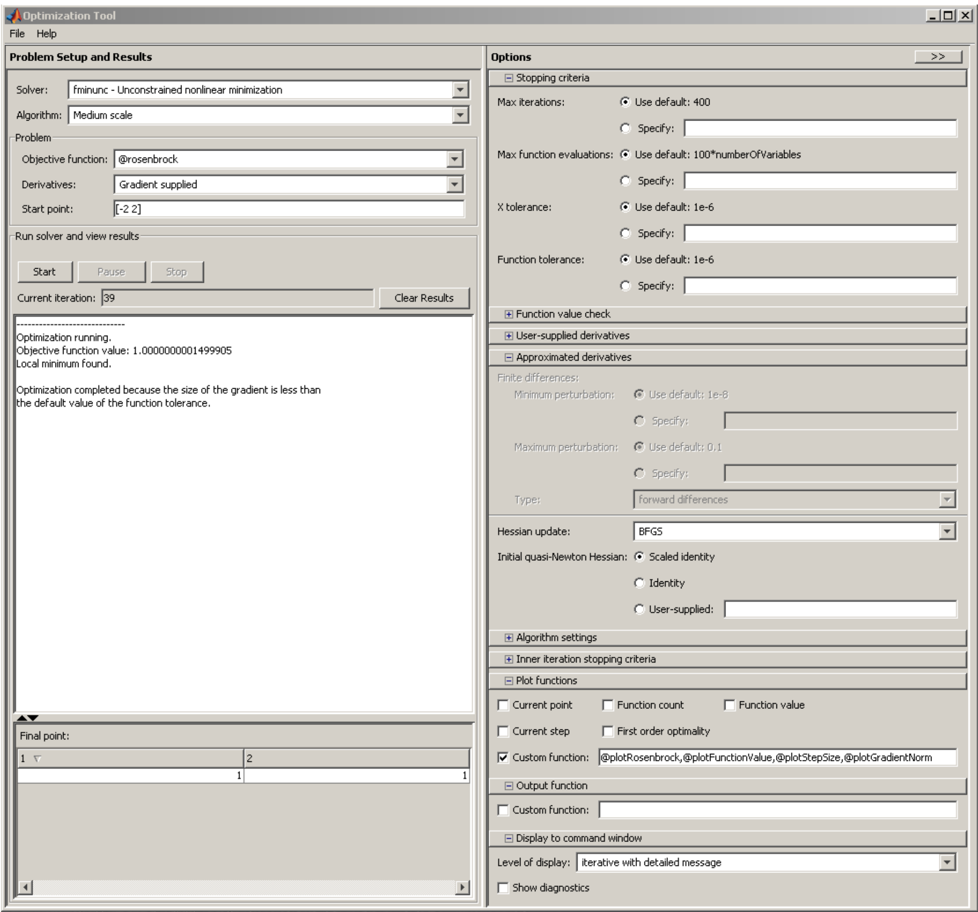
L'objectif de ces travaux pratiques est d'expérimenter les algorithmes vus en cours sur quelques problèmes non linéaires à l'aide de la toolbox d'optimisation de Matlab.

Avant de pouvoir commencer le TP, il est nécessaire de configurer Matlab :

1. copier les fichiers du TP dans votre répertoire personnel,
2. ouvrir Matlab 2013b,
3. modifier le répertoire courant de Matlab (`current directory`) par celui où vous avez copié les fichiers.

## Partie A
### Prise en main

La toolbox d'optimisation de Matlab dispose d'une interface graphique simplifiant l'utilisation et le paramétrage des algorithmes. Pour ouvrir cet outil, entrer la commande `optimtool` dans la fenêtre de commande (`command window`).



## Premiers pas

Le choix de l'algorithme d'optimisation est déterminé par la combinaison de plusieurs paramètres. Pour commencer, nous allons utiliser l'algorithme BFGS, pour cela :

1. dans le champ `Solver`, choisir `fminunc - Unconstrained nonlinear minimization`,
2. dans le champ `Algorithm`, choisir `Medium scale`

Il faut ensuite déterminer la fonction à minimiser. Nous allons nous exercer avec la fonction de Rosenbrock :

$$f(x_1, x_2) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2 + 1$$

Cette fonction est codée en langage MATLAB dans le fichier `rosenbrock.m`.

```
function [f,g]=rosenbrock(X)

    f=100*(X(2)-X(1)^2)^2+(1-X(1))^2+1;

    if nargout>1  % si le gradient est requis alors on le calcule
       g=[100*(4*X(1)^3-4*X(1)*X(2))+2*X(1)-2
           100*(2*X(2)-2*X(1)^2)];
    end

end
```

Il reste à indiquer que l'on souhaite minimiser cette fonction dans l'outil d'optimisation :

1. dans le champ `Objective function`, entrer `@rosenbrock`,
2. dans le champ `Derivates`, choisir `Gradient supplied` car le gradient est calculé par la fonction `rosenbrock`,
3. dans le champ `Start point`, entrer `[-2 2]`, ce vecteur défini le point à partir duquel la minimisation va commencer.

On peut maintenant lancer la minimisation en cliquant sur le bouton `Start`. La fenêtre de résultat indique alors la valeur finale de la fonction ainsi que les raisons de l'arrêt de l'algorithme.

## Ajout de tracés

Pour suivre, l'évolution de l'optimisation, il est utile de tracer certaines valeurs au cours des itérations.

Les graphiques proposés par MATLAB n'étant pas très lisibles et incomplets, nous avons défini nos propres fonctions :

- la fonction `plotRosenbrock` permet de tracer la fonction de Rosenbrock avec le point courant et la direction de descente choisie.
- la fonction `plotFunctionValue` permet de tracer la valeur de la fonction objectif au cours des itérations,
- la fonction `plotFunctionDifference` permet de tracer la valeur absolue de la différence entre deux évaluations successives de la fonction objectif (progression de la fonction objectif),
- la fonction `plotStepSize` permet de tracer la norme de la différence entre deux points successifs (progression de la variable de décision),
- la fonction `plotGradientNorm` permet de tracer la valeur relative de la norme infinie du gradient.

Pour ajouter un tracé, il suffit d'ajouter le nom de la fonction précédé d'un `@` dans le champ `Custom function` de l'onglet `Plot functions`. On peut utiliser plusieurs fonctions simultanément en les séparant par des virgules.

## Critères d'arrêt

La toolbox d'optimisation de MATLAB propose quatre critères d'arrêt :

– le critère `Max iterations (MaxIter)` limite le nombre d'itérations de l'algorithme. Si le nombre d'itérations atteint cette valeur, l'algorithme est stoppée.
– le critère `Max function evaluations (MaxFunEvals)` limite le nombre d'évaluations de la fonction objectif. Comme la fonction est évaluée plusieurs fois par itération, cette valeur doit être plus grande que `MaxIter`.
– le critère `X tolerance (TolX)` stoppe l'optimisation quand la norme de la différence entre deux points successifs (progression de la variable de décision) est inférieure à cette valeur. En d'autres termes, l'algorithme s'arrête à l'itération $k$ si :

$$\|X_k - X_{k-1}\| < \texttt{TolX}$$

– le critère `Function tolerance (TolFun)` a un rôle double. Il stoppe l'optimisation quand la valeur absolue de la différence entre deux évaluations successives de la fonction objectif (progression de la fonction objectif) est inférieure à cette valeur, mais aussi quand la valeur relative de la norme infinie du gradient est inférieure à cette valeur. En d'autres termes, l'algorithme s'arrête à l'itération $k$ si :

$$|f(X_k) - f(X_{k-1})| < \texttt{TolFun} \quad \text{ou} \quad \frac{\|\nabla f(X_k)\|_\infty}{1 + \|\nabla f(X_0)\|_\infty} < \texttt{TolFun}$$

*A.1. Modifier les différents critères d'arrêt pour provoquer la sortie de l'algorithme pour chacun des critères.*

## Approximation du gradient par différences finies

L'optimisation est toujours plus rapide quand on peut calculer explicitement le gradient de la fonction objectif. Néanmoins, il est possible de demander à l'algorithme de calculer une approximation du gradient par différence finie. Il suffit pour cela de choisir l'option `Approximated by solver` dans le champ `Derivates`.

## Choix de l'algorithme

Pour utiliser l'algorithme de la plus forte pente, il suffit de choisir cette méthode dans le champ `Hessian update` de l'onglet `Approximated value`.

Pour utiliser l'algorithme de Nelder et Mead, choisir `fminsearch - Unconstrained nonlinear minimization` dans le champ `Solver`.

*A.2. Observer le comportement des différents algorithmes dans l'espace de décision.*

*A.3. Compléter le tableau ci-dessous avec le nombre d'itérations minimal pour que la norme infinie du gradient soit inférieure à 1e-4.*

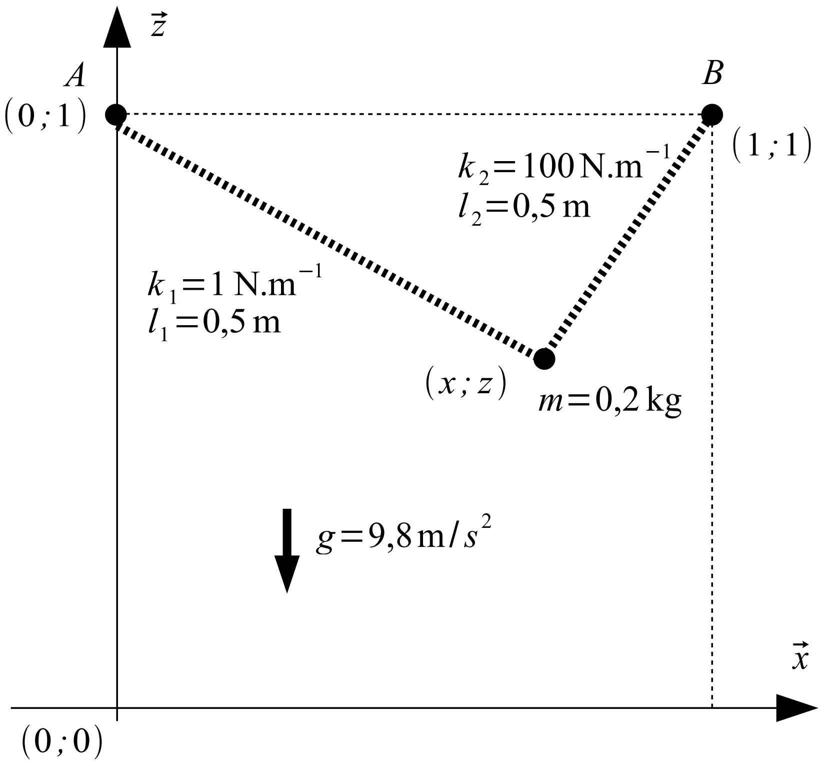
Pour afficher le nombre d'évaluations de la fonction, choisir `iterative with detailed message` dans le champ `Level of display` de l'onglet `Display to command window`. Les résultats s'inscrivent dans la fenêtre de commande (`command window`) de MATLAB.

| Méthode | Nombre d'itérations | Nombre d'évaluations de la fonction | Nombre d'évaluations du gradient |
|---|---|---|---|
| Plus forte pente | | | |
| BFGS | | | |
| BFGS avec estimation du gradient | | | |
| Nelder et Mead | | | |

# Partie B

## Système mécanique à deux ressorts

Soit le système mécanique suivant constitué d'une masse $m$ suspendue par deux ressorts de longueur à vide $l_1$ et $l_2$ et de raideur $k_1$ et $k_2$.




Au repos, ce système minimise son énergie potentielle mécanique définie comme la somme de son énergie potentielle élastique et de son énergie potentielle de pesanteur.

*B.1. En vous inspirant du canevas ci-dessous, créer une nouvelle fonction* `ressorts` *calculant l'énergie potentielle de ce système en fonction du vecteur $\begin{bmatrix} x & z \end{bmatrix}$. On rappelle que l'énergie potentielle d'un ressort est égale à $\frac{1}{2}k\delta^2$ pour un allongement $\delta$. On négligera le poids des ressorts.*

```
function E=ressorts(V)

x=V(1);
```

```
z=V(2);

E=    ...    ;

end
```

*B.2. Trouver la position de la masse au repos en minimisant la fonction* `ressorts`*. Une fonction* `plotRessorts` *est fournie et permet de représenter graphiquement une solution.*

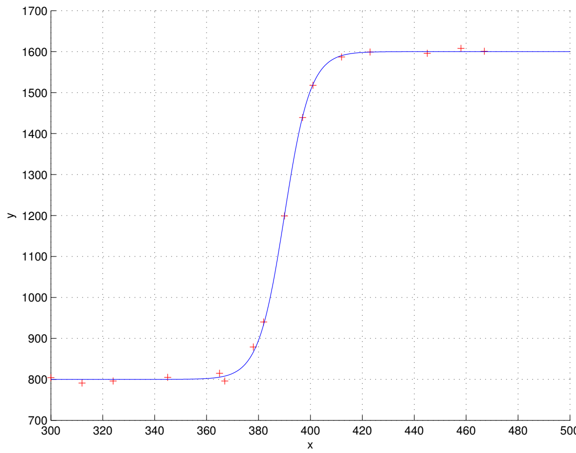
# Partie C
## Ajustement d'un modèle non linéaire

On souhaite ajuster les paramètres d'un modèle non linéaire à des données expérimentales entachées d'erreurs de mesure. Le modèle est de la forme :

$$g(x) = a + b * \tanh\left(\frac{x-c}{d}\right)$$

où $a$, $b$, $c$ et $d$ sont des coefficients réels.

Les données expérimentales et le modèle sont représentés par la figure suivante.




L'objectif est de minimiser l'écart entre le modèle et les données expérimentales $(x_i, y_i)$ au sens des moindres carrés, c'est-à-dire minimiser :

$$f(a,b,c,d) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(g(x_i) - y_i)^2$$

Une fonction `ajustement` est fournie et permet de calculer de calculer $f$ en fonction du vecteur $\begin{bmatrix} a & b & c & d \end{bmatrix}$.

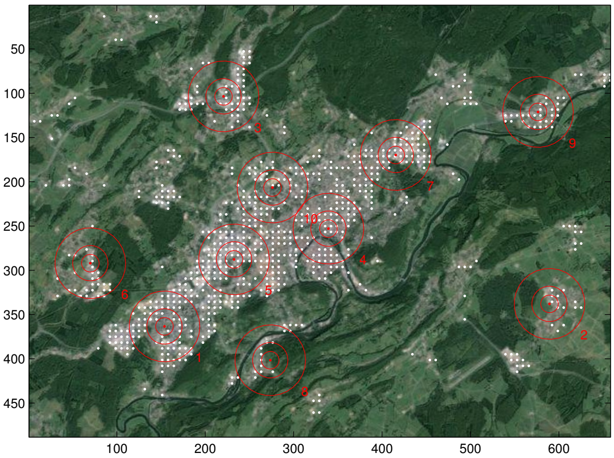
Une fonction `plotAjustement` est également fournie pour représenter graphiquement une solution.

*C.1. Trouver les paramètres $a$, $b$, $c$ et $d$ qui minimisent le critère des moindres carrés.*

*C.2. Tracer la valeur de la fonction objectif au cours des itérations. Qu'observe-t'on ?*

# Partie D
## Placement d'antennes relais

La société *Fruit Telecom* souhaite déployer son réseau 4G sur Besançon. Il est prévu pour cela d'installer dix antennes relais. L'objectif est de trouver l'emplacement optimal de ces dix antennes.



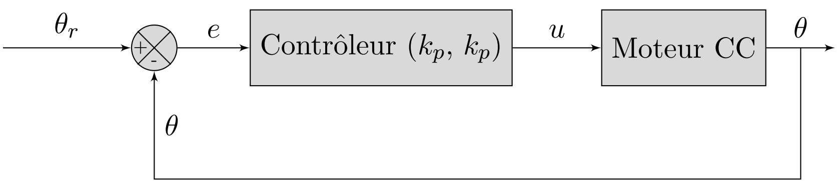

La fonction `couverture` donne la distance moyenne des utilisateurs à l'antenne la plus proche en fonction du vecteur $\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & \cdots & x_{10} & y_{10} \end{bmatrix}$ des coordonnées (en unités arbitraires) des antennes.

Une fonction `plotCouverture` est également fournie et permet de représenter graphiquement une solution.

*D.1. Trouver un vecteur des coordonnées $\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & \cdots & x_{10} & y_{10} \end{bmatrix}$ qui permet d'atteindre une distance moyenne inférieure à 43.*

# Partie E
## Commande d'un servomoteur

Un moteur à courant continu est asservi en position à l'aide d'un correcteur proportionnel-dérivé.




On souhaite trouver les coefficients $k_d$ et $k_p$ du correcteur qui minimisent un critère défini à la fois sur l'erreur de position angulaire $e(t)$ et la tension $u(t)$ appliquée au moteur.

$$J(\alpha) = (1-\alpha)\int_0^{10} e(t)^2 dt + \frac{\alpha}{1000}\int_0^{10} u(t)^2 dt = (1-\alpha)J_1 + \alpha J_2$$

Le coefficient $\alpha \in [0;1]$ permet de pondérer l'influence de chacun des deux sous-critères $J_1$ et $J_2$. Minimiser $J_1$ revient à minimiser l'intégrale de l'erreur de position et donc d'obtenir un asservissement plus rapide. Minimiser $J_2$ revient à minimiser l'intégrale de la tension appliquée et donc d'obtenir un asservissement qui sollicite moins l'actionneur au détriment de la rapidité.

Une fonction `servomoteur` est fournie. Cette fonction permet que calculer $J$ en fonction du vecteur $[k_d\ k_p]$ et de $\alpha$. Pour préciser que l'on veut optimiser la fonction par rapport au premier de ses paramètres et avec $\alpha = 0.5$, il faut écrire : `@(X)servomoteur(X,0.5)` dans le champ `Objective function`.

Une fonction `plotServomoteur` est également fournie et permet de représenter graphiquement la position angulaire en fonction du temps. Elle affiche également les valeurs de $J_1$ et de $J_2$.

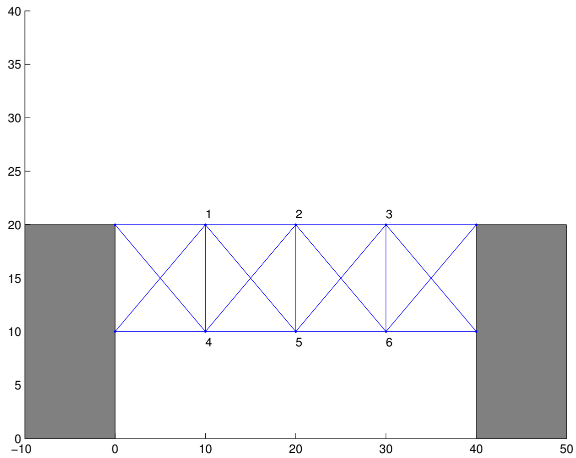
*E.1. Trouver les coefficients $k_d$ et $k_p$ qui minimise $J(0.5)$.*

En faisant varier $\alpha$, on trouve différentes solutions Pareto-optimales (solutions non dominées) pour $J_1$ et $J_2$.

*E.2. Tracer quelques points du front de Pareto. On pourra utiliser la commande `plot` de* MATLAB.

# Partie F
## Déformation d'une structure mécanique

Un pont est construit à l'aide de poutrelles métalliques selon la structure suivante :




La fonction `structure` donne l'énergie potentielle de la structure (en utilisant un calcul similaire au problème des deux ressorts) en fonction du vecteur $V = \begin{bmatrix} x_1 & z_1 & \cdots & x_6 & z_6 \end{bmatrix}$ donnant les coordonnées des points 1 à 6.

La fonction `structure` admet un deuxième paramètre correspondant aux coordonnées initiales $V_0 = \begin{bmatrix} x_{0,1} & z_{0,1} & \cdots & x_{0,6} & z_{0,6} \end{bmatrix}$ des points avant déformation. Pour préciser que l'on veut optimiser la fonction par rapport au premier de ses paramètres, il faut écrire : `@(X)structure(X,V0)`

Une fonction `plotStructure` est également fournie et permet de représenter graphiquement une solution.

*F.1. Trouver le vecteur des coordonnées $x_1$, $z_1$, $\ldots x_6$, $z_6$ des points qui minimise l'énergie potentielle du pont.*

*F.2. Trouver des valeurs pour les critères d'arrêt qui donnent un résultat satisfaisant en un minimum d'itérations.*

On souhaite maintenant trouver la géométrie la plus rigide, c'est-à-dire celle qui minimise la déformation du pont sous son poids. L'idée est lancer plusieurs fois l'optimisation précédente à partir de points initiaux différents et de chercher par une seconde optimisation les positions initiales minimisant la déformation du pont.

L'interface `optimtool` permet de générer automatiquement un script utilisant les réglages en cours. Pour générer un script, choisir la commande `Generate Code...` dans le menu déroulant `File`.

*F.3. Écrire une fonction* `deformation` *qui calcule la valeur absolue de la variation d'altitude du point 2 en fonction de la position initiale $(x_{0,4}, z_{0,4})$ du point 4 et de la hauteur $z_{0,5}$ du point 5. Les positions initiales des points 1, 2 et 3 sont définies selon la figure précédente. Le point 6 est le symétrique du point 4.*

```
function d=deformation(P)

x4=P(1);
z4=P(2);
z5=P(3);

d=   ...   ;

end
```

*F.4. Trouver les coordonnées $x_{0,4}$, $z_{0,4}$, $z_{0,5}$ qui minimisent la déformation au centre du pont.*

Une fonction `plotDeformation` est fournie et permet de représenter graphiquement une solution en fonction du vecteur $\begin{bmatrix} x_{0,4} & z_{0,4} & z_{0,5} \end{bmatrix}$.

# Partie G
## Bonus

Le solveur d'Excel permet également de minimiser une fonction. On propose d'illustrer son fonctionnement avec la fonction de Rosenbrock.

1. Ouvrir Excel,
2. Entrer -2 dans la cellule `A1` et entrer 2 dans la cellule `A2`,
3. Entrer la fonction de Rosenbrock dans la cellule `C1` en utilisant `A1` et `A2` comme variables (dans Excel une formule commence par =),
4. Ouvrir le solveur qui se trouve dans le groupe `Analyse` de l'onglet `Données`,

Il suffit ensuite de renseigner l'objectif par la cellule `C1`, les cellules variables par la zone `A1:A2` (qui définit le point initial), de choisir `Min` et la résolution `GRG non linéaire` et enfin de cliquer sur `Résoudre`. Le résultat s'affiche dans la zone `A1:A2`.

On peut modifier certains paramètres de l'algorithme dans les options du solveur.